Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.У26.31.0006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Reeve J. E. *On the volume of lattice polyhedra* // Proc. London Math. Soc. – 1957. – V. 7. – P. 378–395.

2. Zappa P. *Sulle classi di Dolbeault di tipo* $(0, n-1)$ *con singolarita in un insieme discreto* // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. – 1981. – V. 8. – No 70. – P. 87–95.

3. Tereshonok E. N., Shchuplev A. V. *A Multidimensional analog of the Weierstrass* ζ*-function in the problem of the number of integer points in a domain* // J. of Siberian Federal University. Math. Physics. – 2012. – V. 5. – No 4. – P. 480–484.

С. А. Токаревская

Северный (Арктический) федеральный университет,
Институт математики, информатики
и космических технологий,
s.tokarevskaya@narfu.ru,

ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕНИИ ЧЕТЫРЕХВАЛЕНТНЫХ ОСНАЩЕННЫХ ГРАФОВ В ТОР

Проблемы и некоторые решения задачи вложения оснащенных графов в двумерные поверхности освещались в разные годы различными математиками (см., напр., [1 – 3]). В статье [1] говорится о том, что можно определить род поверхности, куда может быть вложим граф (не только четырехвалентный) за полиномиальное время. В. О. Мантуров в статье [3] доказал теорему о вложении (в общем случае) и вывел полиномиальные алгоритмы для определения вложимости графа в плоскость $\mathbf{R^2}$ (или сферу $\mathbf{S^2}$) проективную плоскость и бутылку Клейна. Мы рассматриваем задачу вложения четырехвалентного оснащенного графа в тор. Рассмотрим хордовую диаграмму $\mathbf{D}_{\Gamma,L}$ оснащенного графа $\mathbf{\Gamma}$ с обходом $\mathbf{L}$. Для вложения в тор необходимо, чтобы все хорды имели оснащение 0. Предположим, что это так.

Теорема. *Для того чтобы граф* $\mathbf{D}_{\Gamma,L}$ *был вложим в тор, необходимо и достаточно, чтобы хорды диаграммы* $\mathbf{D}_{\Gamma,L}$ *можно было разбить на четыре семейства* A, B, C, D *(одно или два могут быть пустыми) так, чтобы:*
1) *хорды одного семейства были не зацеплены;*
2) *хорды трёх из этих семейств (например* A, B, C*, причем одно из них может быть пустым) были расположены таким образом, что множество хорд, принадлежащих одному из семейств и пересекаемых хордами других двух семейств, было одним и тем же.*

План доказательства.

Мы имеем шахматное вложение графа $\mathbf{\Gamma}$ в тор $\mathbf{S}$, фиксируем некоторый обход $\mathbf{L}$ графа $\mathbf{\Gamma}$. Он задает сквозное отображение $l : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}$, которое аппроксимируется вложением (с небольшой корректировкой его в окрестностях концов хорд), которое также обозначим через $\mathbf{L}$. Это вложение является разбивающим: белые клетки лежат по одну сторону от образа окружности, а черные клетки – по другую. Заменим вершины графа дугами с концами на $\mathbf{L}$. Эти дуги будут являться границами белых (или черных) клеток и, естественно, не будут иметь общих точек.

Рассмотрим тор как декартово произведение $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ с координатами $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$, где 2π тождественно отождествлено с 0. Его можем изобразить в виде квадрата, где ϕ – параллель, ψ – меридиан тора.

Применяя гладкую изотопию тора $\mathbf{S}$ можно добиться положения линии $\mathbf{L}$ вдоль границ квадрата. Без ограничения общности можно считать, что все черные клетки находятся внутри линии $\mathbf{L}$, а белые – снаружи.

Далее можно добиться такого положения вершин "белых" дуг, чтобы дуги либо пересекали только параллель ϕ (множество A), либо только меридиан ψ (множество B), либо были "параллельны" одной диагонали квадрата (множество C); либо не пересекали границу квадрата (их можно поместить в любое из множеств A, B, C) (рис. 1).

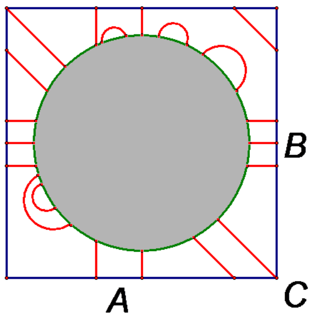

Рис. 1. Разбиение множества "белых" дуг на три семейства

Обратимся к хордовой диаграмме $\mathbf{D}_{\Gamma,L}$, соответствующей графу $\mathbf{\Gamma}$ с обходом $\mathbf{L}$, и её матрице пересечений $\mathbf{M}_{\Gamma,L}$. Согласно теореме 1 [3], при вложении графа в тор множество индексов матрицы $\mathbf{M}_{\Gamma,L}$ может быть разбито таким образом, чтобы сумма рангов квадратных блочных матриц была равна $2 + 0$. В данном изложении матрица $\mathbf{M}_W$ с рангом 2 будет составлена из матрицы $\mathbf{M}_{\Gamma,L}$, с выбором индексов, соответствующих "белым" хордам; а матрица $\mathbf{M}_B$ с рангом 0 – "чёрным".

Заметим, что "чёрные" дуги на поверхности (если таковые существуют) не имеют общих точек, а значит и на диаграмме $\mathbf{D}_{\Gamma,L}$ "чёрные" хорды не будут зацеплены. И, следовательно, матрица $\mathbf{M}_B$ действительно будет иметь ранг 0.

Матрица $\mathbf{M}_W$ – это симметричная матрица над $\mathbb{Z}_2$ с нулями на главной диагонали и рангом равным 2. Легко показать, что множество индексов этой матрицы может быть разбито на три множества, два из которых обязательно не пустые. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Filotti I. S., Miller G. L., Reif J. *On determining the genus of a graph in 0(v0(g)) steps* // Proc. XI Annual Symp. on Theory of Computing. – N.Y.: ACM Press, 1979. – P. 27–37.

2. Lins S., Oliveira-Lima E., Silva V. *A homological solution for the Gauss code problem in arbitrary surface* // J. Comb. Theory. Ser. B. – 2007. – V. 98. – No 3. – P. 506–515.

3. Мантуров В. О. *Вложения четырехвалентных оснащенных графов в двумерные поверхности* // Докл. РАН. – 2009. – Т. 424. – № 3. – С. 308–310.

С. В. Томашевский

Российский университет дружбы народов,

vagabund@list.ru

ОБОБЩЕННЫЕ ФРЕЙМЫ И СИСТЕМЫ РИССА

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой (Ω – множество, Σ – σ-алгебра его подмножеств, μ – принимающая значения из